

САМАРСКИЙ ДВОРЕЦ ДЕТСКОГО И ЮНОШЕСКОГО ТВОРЧЕСТВА
САМАРСКАЯ ОБЛАСТНАЯ АСТРОНОМИЧЕСКАЯ ШКОЛА



РЕШЕНИЯ КОНКУРСНЫХ ЗАДАЧ
ОЛИМПИАДЫ ПО АСТРОНОМИИ SAMRAS-2015
СРЕДИ УЧАЩИХСЯ 10-11 КЛАССОВ
ЗАОЧНОГО ТУРА № 2

Задачи подготовил:

Филиппов Юрий Петрович,
научный руководитель школы,
старший преподаватель кафедры
общей и теоретической физики
Самарского государственного
университета, к.ф.-м.н.

Самара, 2015 г.

Уровень «Новичок» (уровень А)

Задача № 1. «Юпитер на фоне созвездий»

Условие. Как известно, Юпитер – классическая планета Солнечной системы, движущаяся (как и другие планеты) вокруг Солнца. В силу значительного собственного движения (по отношению к земному наблюдателю), планета с течением времени перемещается по небосводу, из одного созвездия в другое. В каких из ниже приведенных созвездий: *Большой Пес, Телец, Близнецы, Андромеда, Персей, Стрелец, Большая медведица, Водолей, Дракон, Рыбы, Эридан, Рысь, Змееносец* ее можно наблюдать в принципе? (0.5 балла за каждое правильно названное созвездие).

Решение:

Орбиты всех классических планет Солнечной системы имеют малые углы наклона к плоскости эклиптики (орбиты Земли) и, потому всегда видны вблизи эклиптики. Эклиптика проходит через 12 зодиакальных созвездий и созвездие Змееносца. Следовательно, именно в этих созвездиях можно наблюдать в принципе Юпитер. Среди представленных 13 созвездий к зодиакальным относятся: *Телец, Близнецы, Стрелец, Водолей, Рыбы* и созвездие Змееносца.

Ответ: *Телец, Близнецы, Стрелец, Водолей, Рыбы* и созвездие Змееносца. ($S_{\max} = 3$ балла).

Задача № 2. «От самых горячих к самым холодным»

Условие. Расположите ниже представленные звезды в порядке убывания их эффективной температуры поверхности: красные карлики, голубые гиганты, желтые карлики, белые карлики, коричневые карлики. (3 балла).

Решение:

Возможно 2 альтернативные цепочки объектов:

- 1) голубые гиганты ($T_{\text{eff}} = 3 \cdot 10^4 \text{ K}$), 2) белые карлики ($T_{\text{eff}} = 10^4 \text{ K}$ – для большинства БК), 3) желтые карлики ($T_{\text{eff}} = 6 \cdot 10^3 \text{ K}$), 4) красные карлики ($T_{\text{eff}} = 3 \cdot 10^3 \text{ K}$), 5) коричневые карлики ($T_{\text{eff}} = (0.33 \div 2.00) \cdot 10^3 \text{ K}$).
- 1) «Новорожденные» белые карлики ($T_{\text{eff}} \sim 10^5 \text{ K}$), 2) голубые гиганты ($T_{\text{eff}} = 3 \cdot 10^4 \text{ K}$), 3) желтые карлики ($T_{\text{eff}} = 6 \cdot 10^3 \text{ K}$), 4) красные карлики ($T_{\text{eff}} = 3 \cdot 10^3 \text{ K}$), 5) коричневые карлики ($T_{\text{eff}} = (0.33 \div 2.00) \cdot 10^3 \text{ K}$).

Две альтернативные цепочки возможны из-за того, что при «рождении» белого карлика он имеет очень высокую температуру поверхности (сотни тысяч градусов), но с течением времени быстро остывает. Характерная температура для большинства белых карликов – 10000 К.

Ответ: первая цепочка – 1) голубые гиганты, 2) белые карлики, 3) желтые карлики, 4) красные карлики, 5) коричневые карлики; вторая цепочка – 1) белые карлики («новорожденные»), 2) голубые гиганты, 3) желтые карлики, 4) красные карлики, 5) коричневые карлики. ($S_{\max} = 3$ балла).

Задача № 3. «Идентификация галилеевых спутников»

Условие. Астроном-любитель с помощью компьютерной программы симулировал конфигурацию галилеевых спутников Юпитера, представленную на рис. 1. С использованием данных для галилеевых спутников, представленных в таблице 1 и значения экваториального радиуса Юпитера ($R_J^{(e)} = 71492 \text{ км}$), идентифицируйте эти спутники по фотографии. (3 балла).



Рис. 1: Конфигурация галилеевых спутников Юпитера, симулированная астрономом-любителем с помощью компьютерной программы.

Параметр	Галилеевы спутники			
	Ио	Европа	Ганимед	Каллисто
Большая полуось, км	421700	670900	1070400	1 882 700
Эксцентриситет	0.0041	0.009	0.0013	0.0074
Периодический, км	420000	664862	1069200	1869000
Апоидий, км	423400	676938	1071600	1897000
Наклонение орбиты к пл-ти экватора Юпитера, град	0.05	0.470	0.200	0.192
Средняя орбитальная скорость, км/с	17.334	13.740	10.880	8.204
Сидерический период обращения, сут	1.769137	3.551181	7.154553	16.689018

Таблица 1: Основные орбитальные характеристики галилеевых спутников Юпитера.

Решение:

Спутники на рис. 1 видны как точечные объекты, особенности их поверхности и цвет фактически не различимы и поэтому их можно определить только по блеску и положению по отношению к Юпитеру. К сожалению программа-симулятор не отображает различие в блеске спутников и, кроме того, в таблице нам не представлена информация об их звездных величинах. Поэтому придется их определять, опираясь на взаимное расположение спутников и материнской планеты.

Заметим, что орбиты всех спутников близки к круговым. Выразим их расстояния до самой близкой (Периодический) и самой далекой (Апоидий) в радиусах Юпитера, в результате получим следующие диапазоны возможных значений их планетоцентрических расстояний:

$$\text{Ио} : 5.87 \leq \frac{r_I}{\mathfrak{R}_J^{(e)}} \leq 5.92, \quad (1)$$

$$\text{Европа} : 9.30 \leq \frac{r_E}{\mathfrak{R}_J^{(e)}} \leq 9.47, \quad (2)$$

$$\text{Ганимед} : 14.96 \leq \frac{r_G}{\mathfrak{R}_J^{(e)}} \leq 14.99, \quad (3)$$

$$\text{Каллисто} : 26.14 \leq \frac{r}{\mathfrak{R}_J^{(e)}} \leq 26.53. \quad (4)$$

Далее определяем с помощью линейки радиус Юпитера и расстояние от центра его диска до спутников, затем находим их отношение. Соответственно для спутников, слева направо по картинке, получились следующие отношения:

$$x_1 = \frac{14.6}{0.65} = 22.76, \quad x_2 = \frac{5.4}{0.65} = 8.31, \quad x_3 = \frac{3.8}{0.65} = 5.85, \quad x_4 = \frac{3.8}{0.65} = 12.76.$$

Из сопоставления интервалов (1)-(4) и полученных результатов следует, что на данном рисунке слева направо представлены Каллисто, Европа, Ио, Ганимед (см. рис. 2).

Замечание: неточное а приближенное соответствие полученных результатов найденным выше интервалам можно объяснить как неточностью воспроизведения трехмерной картины на плоском экране программой-симулятором, так и эффектом проекции.



Рис. 2: Конфигурация галилеевых спутников Юпитера, симулированная астрономом-любителем с указанием имен спутников.

Ответ: к задаче представлен на рис. 2. ($S_{\max} = 3$ балла).

Задача № 4. «Луна у горизонта»

Условие. Астроном-любитель, находясь в пригороде г. Самара ($\lambda = 3^{\text{h}}20^{\text{m}}$), 21 марта наблюдал Луну вблизи горизонта в виде полукруга, выпуклостью вправо. В какую сторону горизонта был направлен его взгляд? В котором приблизительно часу по Самарскому времени это было? Ответ обосновать. Чему было равно звездное время в этот момент? Оцените также прямое восхождение и часовой угол Луны. (4 балла).

Решение:

1. Если Луна видна у горизонта, то в принципе ее можно видеть либо на западе, либо на востоке. Выпуклость вправо соответствует фазе I четверти, когда Луна отстает в суточном движении от Солнца на 90° , поэтому она видна после заката на западе.

2. Если Луна была видна у горизонта на западе, то Солнце в этот момент находилось вблизи нижней кульминации, что соответствует истинной (средней солнечной) полуночи, т.е. местное среднее солнечное время было $T_m \approx 0^h$. Поскольку местное среднее солнечное время связано с долготой местности λ и всемирным временем (T_0) как

$$T_m = T_0 + \lambda,$$

а поясное с T_0 в виде

$$T_N = T_0 + N,$$

то поясное время

$$T_N = T_m - \lambda + N = 24^h - 3^h20^m + 3^h = 23^h40^m.$$

С конца октября по конец марта на территории Самарской области, как правило, в прежние годы (как и в настоящее время) использовалось декретное время. Тогда часы показывали декретное время

$$T_d = T_N + 1^h \approx 00^h40^m.$$

3. Солнце 21 марта находилось в точке весны, прямое восхождение которой $\alpha_\gamma = 0^h00^m$. В нижней кульминации часовой угол Солнца равен $t_\odot = t_\gamma = 12^h$, последнее по определению равно звездному времени (s).

4. Луна отстояла на 90° к востоку (в направлении увеличения искомой координаты). Угол в 90° соответствует 6^h . Следовательно, прямое восхождение Луны есть $\alpha_\zeta \approx 6^h$. А часовой угол тогда

$$t_\zeta = t_\gamma - \alpha_\zeta \approx 6^h.$$

Ответ: его взгляд был направлен на запад; Самарское время наблюдений $T_d \approx 00^h40^m$; $s \approx 12^h$, $\alpha_\zeta = t_\zeta \approx 6^h$; . ($\$_{\max} = 4$ балла).

Задача № 5. «О мировом рекорде по прыжкам в длину и возможности его превосходства»

Условие. На чемпионате мира по легкой атлетике 1991 года, проходившем в г. Токио ($\varphi = 35.71^\circ$, $g_0^T = 9.798 \text{ м/с}^2$) американский спортсмен Майк Пауэлл установил мировой рекорд по прыжкам в длину, который остается не покоренным и по сей день – он смог прыгнуть с использованием стиля «ножницы» на 8.95 м. В каком городе, по вашему мнению, следовало провести те самые соревнования по прыжкам в длину организаторам чемпионата мира, чтобы при прочих равных условиях, рекорд Пауэлла был максимально возможным? Оцените значение дальности прыжка в этом случае. В рассуждениях следует полагать, что Земля есть однородный шар, участвующий в суточном вращении. (4 балла).

Решение:

В фазе прыжка, спортсмен находится в состоянии свободного падения, причем движется под углом к горизонту. Дальность полета L , как известно, определяется выражением вида:

$$L = \frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{g_0}, \quad (5)$$

здесь V_0 – начальная скорость спортсмена (в момент отрыва от Земли), α – угол под которым была направлена скорость спортсмена в момент отрыва, g_0 – ускорение свободного падения у поверхности Земли, в месте прыжка.

Поскольку, прочие условия прыжка остаются в силе, то зависимость от географического положения влияет на величину g_0 . Очевидно, что чем меньше g_0 , тем больше дальность полета. Т.о. необходимо было проводить чемпионат в тех местах, где величина g_0 минимальна, т.е. на экваторе.

Строго на экваторе находятся такие города как Мбандака (Демократическая Республика Конго), Мбарара (Уганда), Кисуму и Накуру (Кения), а также города Понтианак (Индонезия) и Макапа (Бразилия). На экваторе ускорение достигает своего минимального значения $g_0^{\min} = 9.780 \text{ м/с}^2$ (последнее значение можно также представить как $g_0^{\min} = g_0^T - \delta g_0$, где $\delta g_0 = 0.018 \text{ м/с}^2$). Воспользуемся формулой (5), и запишем ее для Токио и города на экваторе, а затем поделим одно на другое:

$$\frac{L_{\max}}{L_T} = \frac{g_0^T}{g_0^{\min}} = \frac{g_0^T}{g_0^T(1 - \delta g_0/g_0^T)} \approx (1 + \delta g_0/g_0^T), \rightarrow L_{\max} \approx L_T \left(1 + \frac{\delta g_0}{g_0^T}\right) = 8.97 \text{ м.} \quad (6)$$

Т.о. рекорд можно было увеличить, в принципе, на 2 см, что в спорте весомая прибавка!

Ответ: соревнования следовало проводить в городе, находящемся на географическом экваторе. К таким городам относятся Мбандака (Демократическая Республика Конго), Мбарара (Уганда), Кисуму и Накуру (Кения), а также города Понтианак (Индонезия) и Макапа (Бразилия); $L_{\max} = 8.97 \text{ м.}$ ($\$_{\max} = 4$ балла).

Задача № 6. «Кратная система ε Лиры и ее разрешение в телескоп»

Условие. Телескоп с какими минимальными значениями увеличения (Γ_{\min}) и диаметра зеркала (D_{\min}) необходимо использовать астроному-любителю, чтобы уверенно разрешить все компоненты кратной звезды ε Лиры? Последняя представляет собой систему из четырех звезд: она условно делится на северный компонент Эпсилон-1 (ε_1) и южный компонент – Эпсилон-2 (ε_2), угловое расстояние между которыми равно $D'' = 3.47'$. В свою очередь, каждая из данных компонент является физически двойной звездой с угловыми расстояниями $d_1 = 2.6''$ и $d_2 = 2.3''$. Разрешающую способность глаза принять равной $\beta_y = 2.5'$. (5 баллов).

Дано:

$$\begin{aligned} D'' &= 3.47', \\ d_1 &= 2.6'', \\ d_2 &= 2.3'', \\ \beta_y &= 2.5'. \end{aligned}$$

Найти:

$$\Gamma_{\min}, D_{\min} - ?$$

Решение:

Как известно, одно из предназначений телескопа – увеличение угла, под которым мы рассматриваем какой-либо объект, в частности, уменьшение величины угла β_y , определяющего разрешающую способность человеческого глаза. Согласно условию, человеческий глаз имеет разрешающую способность $\beta_y = 2.5' = 150''$.

Согласно, определению **угловое увеличение телескопа** есть отношение тангенса угла под которым можно видеть данный объект в телескоп, к тангенсу угла, под которым данный объект виден невооруженным глазом:

$$\Gamma = \frac{\text{tg } \alpha_T}{\text{tg } \alpha_y} \approx \frac{\alpha_T}{\alpha_y}.$$

При записи приближенного равенства, учтено, что углы под которыми видны небесные тела малы, поэтому можно воспользоваться приближением вида:

$$\text{tg } \alpha \approx \alpha, \text{ при } \alpha \ll 1.$$

Чтобы разрешить все компоненты системы необходимо, чтобы угол (α_T^{\min}) под которым мы наблюдаем минимальный масштаб данной системы был не меньше β_y , т.е.

$$\alpha_T^{\min} \geq \beta_y.$$

при этом α_y должен быть равен этому минимальному масштабу, т.е.

$$\alpha_y = \min\{D'', d_1'', d_2''\} = d_2'' = 2.3''.$$

В итоге

$$\Gamma_{\min} = \frac{\beta_y}{d_2''} = 65^\times.$$

Минимальный диаметр зеркала телескопа определяется его разрешающей способностью (для рефлектора):

$$\beta_T = \frac{120''}{D}, \text{ где } D \text{ выражен в мм.} \quad (7)$$

Чтобы телескоп в принципе (при каком-либо увеличении) мог разрешить, необходимо, чтобы $\beta_T \leq d_2''$, тогда минимальный диаметр зеркала представляется в виде:

$$D_{\min} = \frac{120''}{d_2''} = 52 \text{ мм.}$$

Ответ: $\Gamma_{\min} = \frac{\beta_y}{d_2''} = 65^\times$, $D_{\min} = \frac{120''}{d_2''} = 52 \text{ мм.}$ ($S_{\max} = 5$ баллов).

Уровень «Знарок» (уровень В)

Задача № 7. «Противосияние и условия его наблюдения»

Условие. Астроном-новичок, проводя подготовку к наблюдениям явления противосияния, выглянул из окна своего дома и увидел картину, представленную на рис. 3. В каком направлении (укажите на копии рисунка стрелкой) он должен ориентировать свой взгляд, чтобы его увидеть? Сможет ли он его увидеть, находясь в г. Самара? В ДОЛ Жигули? (6 баллов).



Рис. 3: Вид из окна дома астронома-любителя.

Решение:

Противосияние – это слабо заметное размытое светлое пятно на ночном небе (см. рис. 4). Оно имеет диаметр $\sim 20^\circ$ и расположено в плоскости эклиптики, наблюдаемое с противоположной стороны от Солнца. Т.е. свой взгляд астроном должен ориентировать в направлении «от Солнца». Как известно, «рога» растущей Луны всегда направлены от Солнца и задают, таким образом, искомое направление (см. рис. 5).

Это трудное для наблюдений явление. Часто его очертания довольно неопределенны, а яркость почти не превышает яркости соседних областей неба, поэтому его можно видеть только



Рис. 4: Фотография противосияния.



Рис. 5: Вид из окна дома астронома-любителя с указанием направления на противосияние.

в очень хороших атмосферных условиях, вдали от больших городов. Именно поэтому в Самаре увидеть данный феномен не представляется возможным, в силу значительной городской засветки неба.

Противосияние может наблюдаться на безлунном небе вскоре после захода Солнца и до его восхода (сразу по окончании и до начала астрономических сумерек). Поэтому у астронома есть шанс пронаблюдать противосияние в ДОЛ Жигули после захода Луны.

Отметим, что противосияние является частью явления зодиакального света и имеет ту же природу. Оно возникает вследствие рассеяния солнечного света на линзообразном скоплении пылевых частиц, лежащего в Солнечной системе в плоскости эклиптики (находящихся на одной линии с Солнцем и Землей), за орбитой Земли. Такое объяснение зодиакального света было предложено в 1683 г. Кассини, который дал первое научное описание явления.

Ответ: искомое направление указано стрелкой на рис. 5; в Самаре увидеть данный феномен не представляется возможным, в силу значительной городской засветки неба; у астронома есть

шанс пронаблюдать противостояние в ДОЛ Жигули после захода Луны. (6 баллов).

Задача № 8. «Прямые восхождения Луны и Юпитера»

Условие. Астроном, выполняя наблюдения небосвода в ночь с 27 на 28 января 2015 года, пребывая в окрестности г. Самара, обнаружил, что Луна прошла меридиан 27 января в 18 часов 56 мин 45 сек по Самарскому времени. Юпитер прошел меридиан 28 января в 1 час 38 мин 34 сек. Определите прямые восхождения Луны и Юпитера, в моменты их пребывания в меридиане, если известно, что 21 января 2015 года местное звездное время в полночь по Самарскому времени было равно $7^{\text{h}}19^{\text{m}}55^{\text{s}}$. (7 баллов).

<u>Дано:</u>	<u>Решение:</u>
21.01.2015: $s_0 = 7^{\text{h}}19^{\text{m}}55^{\text{s}}$,	Как известно, прямое восхождение небесного тела представляется в виде: $\alpha = s - t,$ где t – часовой угол небесного тела на момент наблюдений, s – звездное время, отвечающее этому моменту. Поскольку астроном находился в окрестности г. Самара, то он мог наблюдать Луну и Юпитер в меридиане, если только последние находились в верхней кульминации, ибо данные тела восходящие и заходящие (на широте г. Самара) и, потому в нижней кульминации (в меридиане) не видны. Тогда их часовой угол в меридиане $t = 0^{\text{h}}00^{\text{m}}$. Т.о. прямое восхождение данных тел равно звездному времени на момент наблюдений: $\alpha = s.$
27.01.2015:	
$t_{\zeta} = 18$ часов 56 мин 45 сек,	
28.01.2015:	
$t_{\uparrow} = 1$ час 38 мин 34 сек.	
<u>Найти:</u>	
$\alpha_{\zeta}, \alpha_{\uparrow} - ?$	

Т.о. прямое восхождение данных тел равно звездному времени на момент наблюдений:

$$\alpha = s.$$

Для определения звездного времени учтем, что звездные сутки короче среднесолнечных на $\Delta s = 3^{\text{m}}56.6^{\text{s}}$. Это означает, что начало каждых последующих среднесолнечных суток будет соответствовать звездному времени, сдвинутому вперед на Δs . Т.о. звездное время на начало 27 и 28 января есть

$$27.01.2015 : s_0^{(1)} = s_0 + 6 \cdot \Delta s = 7^{\text{h}}19^{\text{m}}55^{\text{s}} + 23^{\text{m}}40^{\text{s}} = 7^{\text{h}}43^{\text{m}}35^{\text{s}},$$

$$28.01.2015 : s_0^{(2)} = s_0 + 7 \cdot \Delta s = 7^{\text{h}}19^{\text{m}}55^{\text{s}} + 27^{\text{m}}36^{\text{s}} = 7^{\text{h}}47^{\text{m}}31^{\text{s}}.$$

Звездные времена искомым событиям и прямые восхождения небесных тел есть:

$$s_{\zeta} = \alpha_{\zeta} = s_0^{(1)} + k \cdot t_{\zeta} = 7^{\text{h}}43^{\text{m}}35^{\text{s}} + 18^{\text{h}}59^{\text{m}}52^{\text{s}} = 2^{\text{h}}43^{\text{m}}37^{\text{s}},$$

$$s_{\uparrow} = \alpha_{\uparrow} = s_0^{(2)} + k \cdot t_{\uparrow} = 7^{\text{h}}47^{\text{m}}31^{\text{s}} + 1^{\text{h}}38^{\text{m}}50^{\text{s}} = 9^{\text{h}}26^{\text{m}}21^{\text{s}},$$

здесь $k = 86400/86164 = 1.002739$ – переводной коэффициент среднесолнечного времени в звездное.

Ответ: $\alpha_{\zeta} = 2^{\text{h}}43^{\text{m}}37^{\text{s}}$, $\alpha_{\uparrow} = 9^{\text{h}}26^{\text{m}}21^{\text{s}}$. (7 баллов).

Задача № 9. «Плотность атмосферы Марса»

Условие. Оцените плотность атмосферы Марса (главным образом, состоящей из углекислого газа) у его поверхности (в $\text{кг}/\text{м}^3$ и плотностях атмосферы Земли), если известно, что ее средняя температура составляет -50°C , а давление марсианского воздуха – 4.77 мм ртутного столба. Плотность земной атмосферы и молярная масса равны соответственно $\rho_{\oplus} = 1.29 \text{ кг}/\text{м}^3$ и $\mu_{\oplus} = 29 \text{ г}/\text{моль}$, при температуре $T_{\oplus} = 0^{\circ}\text{C}$ и давлении $p_{\oplus} = 760 \text{ мм. ртутного столба}$. (8 баллов).

Дано:

$$\begin{aligned}
 t_{\text{M}} &= -50^{\circ}\text{C}, \\
 t_{\oplus} &= 0^{\circ}\text{C}, \\
 p_{\text{M}} &= 4.77 \text{ мм рт. ст.}, \\
 p_{\oplus} &= 760 \text{ мм рт. ст.}, \\
 \rho_{\oplus} &= 1.29 \text{ кг/м}^3, \\
 \mu_{\text{M}} &= 44 \text{ г/моль}, \\
 \mu_{\oplus} &= 29 \text{ г/моль}.
 \end{aligned}$$

Найти:

$$\rho_{\text{M}} - ?$$

Решение:

Для решения задачи воспользуемся уравнением Менделеева-Клапейрона для идеального газа в виде:

$$p = \frac{\rho}{\mu}RT, \quad (8)$$

здесь $\{p, \rho, \mu, T\}$ – {давление, плотность, молярная масса, абсолютная температура} газа, $R = 8.31 \text{ Дж/(К} \cdot \text{моль)}$ – универсальная газовая постоянная. Поскольку атмосферы Земли и Марса являются относительно разреженными, то атмосферный газ можно считать идеальным.

Учтем также, что абсолютная температура T и эмпирическая температура t (определяемая по шкале Цельсия) связаны соотношением вида:

$$T = t_0 + t, \text{ где } t_0 = 273.15 \text{ К.} \quad (9)$$

Запишем уравнение (8) для атмосферного газа Марса и Земли:

$$p_{\text{M}} = \frac{\rho_{\text{M}}}{\mu_{\text{M}}}RT_{\text{M}}, \quad p_{\oplus} = \frac{\rho_{\oplus}}{\mu_{\oplus}}RT_{\oplus}.$$

Поделим одно уравнение на другое:

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{p_{\text{M}}}{p_{\oplus}}\right) &= \left(\frac{\rho_{\text{M}}}{\rho_{\oplus}}\right) \left(\frac{\mu_{\oplus}}{\mu_{\text{M}}}\right) \left(\frac{t_0 + t_{\text{M}}}{t_0 + t_{\oplus}}\right), \Rightarrow \\
 \rho_{\text{M}} &= \rho_{\oplus} \left(\frac{p_{\text{M}}}{p_{\oplus}}\right) \left(\frac{\mu_{\oplus}}{\mu_{\text{M}}}\right) \left(\frac{t_0 + t_{\oplus}}{t_0 + t_{\text{M}}}\right) = 1.16 \cdot 10^{-2} \rho_{\oplus} = 1.50 \cdot 10^{-2} \text{ кг/м}^3.
 \end{aligned}$$

Здесь мы учли, что $\mu_{\text{M}} = 44 \text{ г/моль}$ – молярная масса углекислого газа.

Ответ: $\rho_{\text{M}} = 1.16 \cdot 10^{-2} \rho_{\oplus} = 1.50 \cdot 10^{-2} \text{ кг/м}^3$. (8 баллов).

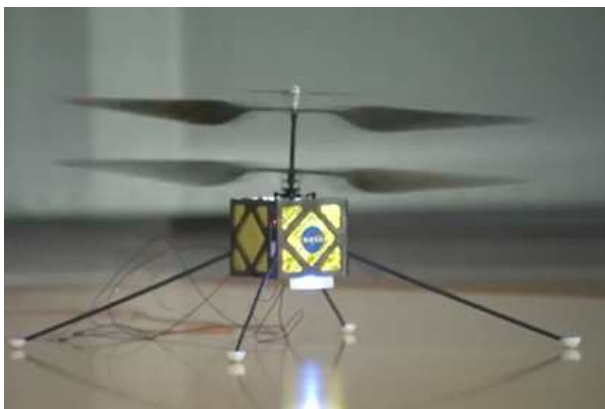


Рис. 6: фото дрона НАСА для исследования Марса.

С использованием имеющихся данных и результатов предыдущей задачи определите минимальную подъемную силу и соответствующую полезную мощность, которые должен иметь дрон для полета в марсианской атмосфере. Ускорение свободного падения у поверхности планеты $g_0 = 3.7 \text{ м/с}^2$. (8 баллов).

Дано:

$$\begin{aligned}
 D &= 1.1 \text{ м}, \\
 m &= 1.5 \text{ кг}, \\
 g_0 &= 3.7 \text{ м/с}^2.
 \end{aligned}$$

Найти:

$$F_{\ell}^{(\min)}, N_{\min} - ?$$

Решение:

При работе вертолета, вращающийся винт толкает марсианский воздух вниз со скоростью V_0 . За время Δt винт проталкивает под себя порцию воздуха Δm , действуя на него с силой давления F_p . Данная сила может быть определена с использованием закона изменения импульса газа:

$$F_p = \frac{\Delta m V_0}{\Delta t},$$

Порция воздуха массы Δm будет иметь форму, близкую к форме цилиндра с площадью основания $\pi D^2/4$, и высотой $\Delta h = V_0 \cdot \Delta t$. Тогда объем данной порции воздуха есть $V_g = \pi D^2 \Delta h/4$, а масса

$$\Delta m = \rho_{\sigma} V_g = \rho_{\sigma} \pi D^2 \Delta h/4 = \rho_{\sigma} \pi V_0 \Delta t D^2/4,$$

ρ_{σ} – средняя массовая плотность марсианского воздуха у поверхности планеты (получена в предыдущей задаче). В итоге силу давления можно представить в виде:

$$F_p = \frac{\pi}{4} \rho_{\sigma} V_0^2 D^2. \quad (10)$$

По третьему закону Ньютона на лопасти винта (а, значит, и на сам вертолет) действует подъемная сила F_{ℓ} , направленная вверх и равная F_p . Для того, чтобы вертолет начал полет необходимо, чтобы подъемная сила была не меньше силы тяжести, действующей на вертолет, т.е.

$$F_{\ell} \geq m g_0,$$

Рассмотрим далее предельный случай, который и будет, очевидно, определять минимальную подъемную силу, действующую на вертолет:

$$F_{\ell}^{(\min)} = m g_0 = 5.55 \text{ Н}, \text{ или } \frac{\pi}{4} \rho_{\sigma} V_0^2 D^2 = m g_0, \Rightarrow V_0 = \sqrt{\frac{4}{\pi} \frac{m g_0}{\rho_{\sigma} D^2}}. \quad (11)$$

Минимальная полезная мощность дрона определяется скоростью совершения работы над марсианским воздухом, который разгоняется винтами до скорости V_0 , когда сила давления равна $F_{\ell}^{(\min)}$:

$$N_{\min} = F_{\ell}^{(\min)} V_0 = m g_0 \sqrt{\frac{4}{\pi} \frac{m g_0}{\rho_{\sigma} D^2}} = 109.5 \text{ Вт} \approx 110 \text{ Вт}. \quad (12)$$

Ответ: $F_{\ell}^{(\min)} = m g_0 = 5.55 \text{ Н}$, $N_{\min} = F_{\ell}^{(\min)} V_0 \approx 110 \text{ Вт}$. (8 баллов).

Задача № 11. «Минимальное время полной зарядки дрона NASA»

Условие. С использованием результатов предыдущей задачи, а также рис. 6, определите минимальный промежуток времени Δt_{\min} , необходимый для зарядки аккумуляторов, посредством солнечных батарей (с КПД $\eta_{sb} = 10\%$), которые будут установлены на боковые грани (предполагается, что рабочая поверхность батарей будет равна площади боковой грани) кубического контейнера, если свет от Солнца может падать лишь на две из четырех граней. Данного заряда должно хватить на 10 минут разведывательного полета с мощностью, превышающей минимальную в 1.5 раза. КПД электромеханического привода винта и аккумуляторов дрона составляет $\eta_v = 80\%$. (9 баллов).

<p>Дано:</p> <p>$\eta_{sb} = 10\%$, $\Delta t = 10 \text{ мин}$, $N = 1.5 N_{\min}$, $\eta_v = 80\%$.</p>	<p>Решение:</p> <p>Вычислим полезную работу A_{Π} (затрачиваемую на разгон атмосферного воздуха и создания подъемной силы), которую должен совершить дрон в процессе своего полета в атмосфере Марса, в течение времени Δt:</p> $A_{\Pi} = N \Delta t = 99000 \text{ Дж}.$ <p>Работа, затрачиваемая электроприводом + аккумуляторами дрона за тот же промежуток есть</p> $A_3 = \frac{A_{\Pi}}{\eta_v} = 123750 \text{ Дж}.$
<p>Найти:</p> <p>$\Delta t_{\min} = ?$</p>	

Электрическая энергия W_3 , запасенная в аккумуляторах дрона должна быть не меньше работы A_3 . Данная энергия должна быть выработана солнечными батареями площадью S за время, не меньшее чем Δt_{\min} , т.е.

$$W_3^{(\min)} = \eta_{sb} f_{\sigma} S_{\text{eff}} \Delta t_{\min}, \quad (13)$$

здесь f_{\odot} – солнечная постоянная для Марса, т.е. освещенность создаваемая Солнцем у поверхности данной планеты (мы пренебрегаем слабым поглощением атмосферы планеты). Поскольку Марс в 1.52 раза дальше от Солнца, нежели Земля, а солнечная постоянная для Земли есть $f_{\odot} = 1361 \text{ Вт/м}^2$, то солнечная постоянная для Марса с учетом закона обратных квадратов представляется в виде:

$$f_{\odot} = \frac{1}{(1.52)^2} f_{\odot} = 589 \text{ Вт/м}^2.$$

S_{eff} – эффективная площадь рабочей поверхности батарей, освещаемых Солнцем. Поскольку, по условию задачи, освещаться могут лишь две грани, то, с учетом эффекта проекции, величина эффективной площади не может превышать $S = \sqrt{2} S_I$, где S_I – площадь одной боковой грани куба. Последнюю можно легко оценить по фотографии и размерам винта. Согласно, условию предыдущей задачи диаметр винта равен 1.1 м, при этом его диаметр на фото равен 10 см. Размер ребра при этом составляет 1.8 см (ваши значения для масштабов дрона, определенных по рисунку, могут отличаться от указанных, но итоговый результат должен быть тем же). Составляя пропорцию легко убедиться в том, что ребро кубического контейнера должно быть равно $a = 20$ см. Тогда площадь одной боковой грани есть $S_I = a^2 = 0.04 \text{ м}^2$, а следовательно $S_{\text{eff}} = 0.057 \text{ м}^2$. В итоге из (14) следует, что

$$\Delta t_{\min} = \frac{A_3}{\eta_{sb} f_{\odot} S_{\text{eff}}} = \frac{N \Delta t}{\eta_{sb} \eta_v f_{\odot} S_{\text{eff}}} = 36860 \text{ с} = 10.2 \text{ ч.} \quad (14)$$

Т.о. для зарядки аккумуляторов дрона требуется значительное количество времени (значительная часть марсианского дня).

Ответ: $\Delta t_{\min} = \frac{N \Delta t}{\eta_{sb} \eta_v f_{\odot} S_{\text{eff}}} = 36860 \text{ с} = 10.2 \text{ ч.}$ (9 баллов).

Задача № 12. «Даты весенних равноденствий XXI века»

Условие. Известно, что в 2015 году весеннее равноденствие наступит 20 марта в момент $T_{2015} = 22$ часа 45 минут по всемирному времени. Используя лишь продолжительность тропического года $T_{\text{тр}} = 365.24219$ сут и представления о григорианском календаре, определите даты и время (приблизленно), соответствующие самому позднему и самому раннему наступлению момента весеннего равноденствия в XXI веке. В какое время наступит весеннее равноденствие в 2100 году – последнем году XXI столетия? Сравните полученные результаты с точными расчетными данными профессионалов (самостоятельно используя интернет-источники). Несомненно, Вы обнаружите расхождения в значениях результатов. Каковы основные причины подобных расхождений? (10 баллов).

Решение:

Прежде всего отметим, некоторые особенности наступления момента весеннего равноденствия (ВР). Как известно, разность между продолжительностью тропического и обычного (невисокосного) календарного года есть

$$\Delta t_1 = T_{\text{тр}} - 365 \text{ сут} = 5 \text{ час } 49 \text{ мин} > 0.$$

Следовательно, каждый последующий невисокосный год наступление ВР происходит на промежуток времени Δt_1 , позже момента предыдущего невисокосного года. При наступления високосного года момент смещается вперед на промежуток Δt_1 , и при этом откатывается назад на сутки (поскольку добавляется 29 февраля). Следовательно, момент наступления ВР в 2016 году приходится на

$$T_{2016} = T_{2015} + \Delta t_1 - 1 \text{ сут} = 4 \text{ час } 34 \text{ мин} \text{ (20 марта)}.$$

Если все года с 2000 по 2099 разбить на четверки лет, в которых ведущий год – високосный, а замыкающий последний невисокосный (например, {2000, 2001, 2002, 2003}, {2004, 2005, 2006, 2007}, {2008, 2009, 2010, 2011} и т.д.), то самый поздний момент надо искать среди последних невисокосных лет этих четверок, ибо здесь дата и время смещаются максимально вперед от момента

Год	Наши результаты	Результаты профессионалов [1,2]
2000	20/03 7 час 34 мин	7 час 35 мин
Самое позднее ВР в XXI веке		
2003	21/03 01 час 01 мин	01 час 00 мин
2016	20/03 4 час 34 мин	4 часа 31 мин
Самое раннее ВР в XXI веке		
2096	19/03 13 часов 34 мин	14 часов 03 мин
2100	20/03 12 часов 50 мин	13 часов 04 мин

Таблица 2: Искомые даты и время наступления ВР в XXI веке.

ВР последнего високосного года. А самый ранний момент наступления ВР, очевидно, приходится на високосный год.

Далее заметим, что в каждой такой четверке средняя продолжительность календарного года составляет 365.25 сут, что на

$$\Delta t_2 = 365.25 \text{ сут} - T_{\text{tr}} = 0.00781 \text{ сут} = 11 \text{ мин } 16 \text{ сек}$$

больше продолжительности тропического года. За те же 4 года, набегит разность между календарными и тропическими годами равная $\Delta t_3 = 4 \times \Delta t_2 = 45 \text{ мин}$. Следовательно, наступление ВР каждый последующий високосный год происходит приблизительно на 45 минут раньше момента предыдущего високосного.

Согласно, общим принципам времяисчисления Григорианского календаря, последний високосный год в этом столетии будет 2096 год (2100 год будет невисокосным, поскольку количество сотен столетий "21" нацело не делится на "4"), с учетом выше сказанного именно в этот год момент наступления ВР будет самым ранним. Для этого учтем, что 2096 отстоит на 20 таких четырехлетий от 2016 года, следовательно

$$T_{2096} = 4 \text{ час } 34 \text{ мин (20 марта)} - 20 \times 45 \text{ мин} = 13 \text{ час } 34 \text{ мин (19 марта 2096 года)}.$$

Теперь нетрудно вычислить момент наступления ВР в 2100 году, поскольку данный год невисокосный, то

$$T_{2100} = 13 \text{ час } 34 \text{ мин} + 4 \times \Delta t_1 = 12 \text{ час } 50 \text{ мин (20 марта 2100 года)}.$$

Рассуждая аналогично предыдущему случаю, легко убедиться в том, что наиболее поздний момент в XXI веке наступления ВР приходится на 2003 год – последний невисокосный год в первом четырехлетии столетия. Далее заметим, что 2000 год первый високосный год первой четверки отстоит от 2016 года на 4 полных четырехлетия, тогда момент наступления ВР в 2000 году есть

$$T_{2000} = 4 \text{ час } 34 \text{ мин} + 4 \times \Delta t_3 = 7 \text{ час } 34 \text{ мин (20 марта 2000 года)}.$$

Тогда момент наступления ВР в 2003 году есть

$$T_{2003} = T_{2000} + 3 \times \Delta t_1 = 1 \text{ час } 01 \text{ мин (21 марта 2003 года)}.$$

Сводка полученных нами результатов и результатов, полученных профессионалами и представленными в [1,2]¹ продемонстрированы в таблице 2. Из сравнения результатов следует, что они действительно различаются, причем с удалением рассматриваемого момента от настоящего времени ошибка настоящих результатов возрастает. Это обусловлено, изменением продолжительности тропического года в силу периодического характера нутации земной оси и временной эволюции гравитационных возмущений со стороны Солнца и планет. В настоящих расчетах это не было принято во внимание (но учтено профессионалами).

¹см. например, [1] <http://www.astropixels.com/ephemeris/soleq2001.html>,
[2] <http://ns1763.ca/equinox/vern1788-2211.html>.

Ответ: искомые результаты представлены в таблице 2. Причина расхождения наших результатов и результатов профессионалов – изменение продолжительности тропического года в силу периодического характера нутации земной оси и временной эволюции гравитационных возмущений со стороны Солнца и планет, что не было принято во внимание в настоящих расчетах, но учтено профессионалами. ($S_{\max} = 10$ баллов).

Уровень «Профи» (уровень С)

Задача № 13. «Определение зависимости плотности и давления атмосферного газа от высоты»

Условие. С использованием модели идеального газа определите зависимости давления (p) и плотности (ρ) атмосферы планеты-шара (со сферически-симметричным распределением вещества, с массой \mathcal{M} и радиусом \mathcal{R}) от высоты (h) над ее поверхностью, при условии $h \ll \mathcal{R}$. В расчетах следует полагать, что температура T и химический состав атмосферы не зависят от высоты. Доказать, что непосредственно у поверхности планеты искомые зависимости есть линейные функции высоты h . С использованием результатов задач № 9, 10, получите зависимость $\rho(h)$ для Марса на интервале $0 \div 25$ км. (11 баллов).

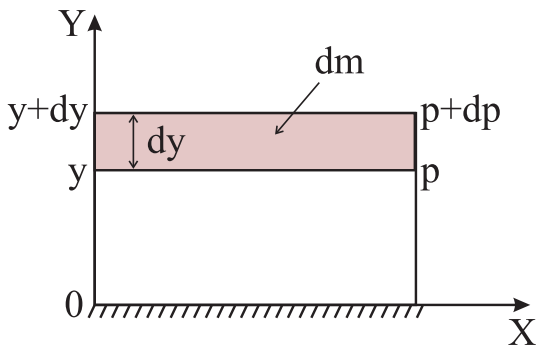


Рис. 7: к определению плотности газа.

Решение:

Рассмотрим вертикальный столб идеального газа с площадью основания S . Выберем декартову систему координат так, как показано на рис. 7. Рассмотрим бесконечно тонкий горизонтальный слой газа толщины dy , находящийся на расстоянии y от поверхности планеты. Данный слой имеет массу dm . Поскольку слой находится в состоянии покоя относительно поверхности планеты и, следовательно, относительно данной системы отсчета, то сумма сил приложенных к слою, равна нулю:

$$\vec{F}_{p1} + \vec{F}_{p2} + dm\vec{g} = 0, \quad (15)$$

где \vec{F}_{p1} , \vec{F}_{p2} – силы давления, действующие со стороны ниже и выше лежащих слоев газа соответственно; g – ускорение свободного падения у поверхности планеты, определяемое выражением вида:

$$g_0 = \frac{G \mathcal{M}}{\mathcal{R}^2}.$$

Спроецируем данное уравнение на координатную ось OY .

$$F_{p1} - F_{p2} - dm g = 0. \quad (16)$$

Учтем, что силы давления и тяжести можно представить в виде:

$$F_{p1} = pS, \quad F_{p2} = (p + dp)S, \quad dm g = \rho S dy \cdot g,$$

где p – давление газа на высоте y , $p + dp$ – давление газа на высоте $y + dy$. Подставляя полученные выражения в уравнение (16) в итоге получаем:

$$dp = -\rho g dy. \quad (17)$$

Далее воспользуемся уравнением Менделеева-Клапейрона в виде:

$$p = \frac{\rho}{M} \mathcal{R} T. \quad (18)$$

По условию задачи температура атмосферы T и химический состав атмосферы, а следовательно, и молярная масса M – постоянные величины; кроме того, на высотах $h \ll \mathfrak{R}$ ускорение свободного падения g можно полагать также не зависящим от высоты.

Подставим (18) в (17), в результате получаем:

$$\frac{1}{M} \mathcal{R} T d\rho = -\rho g dy, \Rightarrow \frac{d\rho}{\rho} = -\frac{M g dy}{\mathcal{R} T}.$$

Последнее дифференциальное уравнение можно проинтегрировать в конечных пределах:

$$\int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho'}{\rho'} = -\int_0^h \frac{M g}{\mathcal{R} T} dy, \Rightarrow \ln \left[\frac{\rho}{\rho_0} \right] = -\frac{M g h}{\mathcal{R} T}.$$

Используя свойство логарифма и экспоненциальной функции, приходим к известной **барометрической формуле для плотности**:

$$\exp \left[\ln \left[\frac{\rho}{\rho_0} \right] \right] = \exp \left[-\frac{M g h}{\mathcal{R} T} \right], \Rightarrow \rho = \rho_0 e^{-h/H}, \text{ где } H = \frac{\mathcal{R} T}{M g}, \quad (19)$$

где ρ_0 – массовая плотность атмосферы у поверхности планеты; величина H называется **шкалой высоты**. Подставляя последнее выражение в уравнение (18), в результате получаем:

$$p = p_0 e^{-h/H}, \text{ где } p_0 = \frac{\rho_0}{M} \mathcal{R} T. \quad (20)$$

Последняя формула традиционно называется **барометрической формулой**.

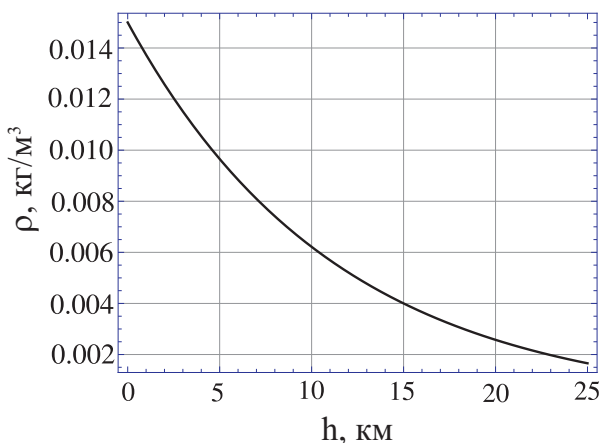


Рис. 8: зависимость массовой плотности атмосферы Марса от высоты h , вычисленная согласно (19).

атмосферы Марса от высоты на интервале $0 \div 25$ км (см. рис. 8).

Непосредственно у поверхности планеты, где $h \ll H$ (H составляет традиционно $\sim 5 \div 15$ км), можно воспользоваться приближением вида:

$$e^x \approx 1 + x, \text{ при } x \ll 1,$$

тогда давление и плотность атмосферы можно представить в виде:

$$\rho = \rho_0 \left(1 - \frac{h}{H} \right), \quad p = p_0 \left(1 - \frac{h}{H} \right). \quad (21)$$

Т.о. массовая плотность и давление атмосферного газа зависят от высоты по линейному закону.

В случае Марса шкала высоты равна $H = 11.35$ км. С использованием выражения (19) получен график зависимости массовой плотности

Ответ: представлен выражениями (19)-(21) и рис. 8. ($\$_{\max} = 11$ баллов).

Задача № 14. «Проект StratoSail для исследования Марса»

Условие. Учеными американской корпорации Global Aerospace Corporation был предложен в 2004 году проект воздушного шара *StratoSail* для исследования атмосферы и поверхности Марса. Система представляет собой

1. баллон из герметичного прочного тонкого материала (с поверхностной плотностью $\sigma = 15$ г/м²), имеющего форму шара и наполненного гелием под давлением, не меньше чем в $\eta = 2$ раза, превосходящим давление атмосферы на высоте, где находится баллон (для гарантированного раскрытия шара при запуске);
2. гондолы с массой $M_g = 250$ кг, содержащей основную часть научного оборудования, подвешенной на гибком тросе;

3. планера – легкого дрона, закрепленного на нижнем конце легкого длинного троса, общая масса которых $M_p = 150$ кг. Дрон предназначен для управления полетом воздушным шаром и должен располагаться на высоте $h_p = 2$ км.

С использованием результатов задач № 9,10,13, определите

- максимально возможные массу и радиус баллона, если суммарная масса баллона, гондолы и планера с тросом не должна превышать $M_{\max} = 645$ кг для их успешной доставки на Марс;
- высоту, на которой должен находиться баллон в режиме стационарного воздухоплавания в атмосфере красной планеты;
- массу гелия, необходимую для заполнения баллона до указанного давления;
- длину троса, чтобы планер пребывал на указанной высоте;
- массу и диаметр троса (круглого сечения), если последний сделан из стали с массовой плотностью $\rho_{st} = 7900$ кг/м³ и предельным механическим напряжением $\sigma_{br} = 5$ ГПа; трос должен выдерживать перегрузку $\chi = 5$, обусловленную планером и его взаимодействием с ветром ($g_0 = 3.71$ м/с² – ускорение свободного падения у поверхности Марса);
- максимально допустимую массу дрона m_d . (12 баллов).

Решение:

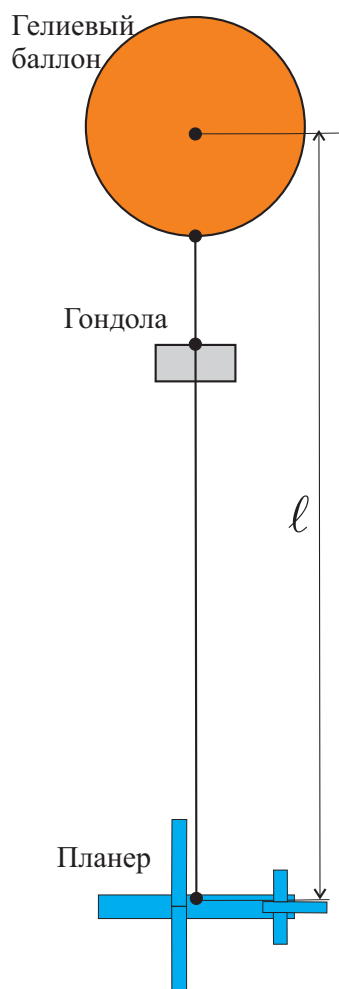


Рис. 9: к определению структуры воздушного шара StratoSail.

- Определим максимально возможные массу и радиус баллона (без гелия): согласно условию, полная масса баллона, гондолы и планера есть

$$M_{\max} = M_g + M_p + M_{sh}, \Rightarrow M_{sh} = M_{\max} - M_g - M_p = 245 \text{ кг},$$

с другой стороны

$$M_{sh} = \sigma \cdot 4\pi R^2, \Rightarrow R = \sqrt{\frac{M_{sh}}{4\pi\sigma}} = 36 \text{ м}.$$

- для определения высоты воздухоплавания необходимо предварительно определить массовую плотность (ρ_a) атмосферы Марса на данной высоте. Для этого запишем условие плавания данного летательного аппарата:

$$\rho_a g V_b = \rho_{He} g V_b + M_{\max} g_0, \Rightarrow (\rho_a - \rho_{He}) V_b = M_{\max}, \quad (22)$$

здесь $V_b = \frac{4}{3}\pi R^3$ – объем баллона. Далее воспользуемся условием

$$\rho_{He} \geq \eta \cdot \rho_a,$$

а также уравнением Менделеева-Клапейрона для атмосферного газа и гелия в виде:

$$\rho_{He} = \frac{\rho_{He}}{M_{He}} \mathcal{R} T, \quad \rho_a = \frac{\rho_a}{M_a} \mathcal{R} T, \Rightarrow$$

$$\frac{\rho_{He}}{\rho_a} = \left(\frac{\rho_{He}}{\rho_a} \right) \left(\frac{M_a}{M_{He}} \right) = \eta, \Rightarrow \rho_{He} = \eta \rho_a \left(\frac{M_{He}}{M_a} \right). \quad (23)$$

Подставляя (23) в (22) в итоге получаем

$$\rho_a = \frac{3}{4\pi} \frac{M_{\max}}{R^3} \left[1 - \eta \left(\frac{M_{He}}{M_a} \right) \right]^{-1} = 0.0040 \text{ кг/м}^3. \quad (24)$$

Из рис. 8 видно, что данное значение плотности достигается на высоте $h_b = 15.0$ км.

в) определим массу гелия, содержащегося в баллоне:

$$m_{\text{He}} = \rho_{\text{He}} V_b = \frac{4}{3} \pi R^3 \eta \rho_a \left(\frac{M_{\text{He}}}{M_a} \right) = 142 \text{ кг.}$$

г) Длина троса, тогда должна быть равной

$$\ell = h_b - h_p = 13 \text{ км.}$$

д) Определим диаметр и массу троса с учетом, что в верхней точке троса (точке крепления к баллону) его механическое напряжение не должно быть больше σ_{br} , при этом трос должен выдерживать перегрузку равную χ , тогда в предельной ситуации:

$$\sigma_{\text{br}} S_c = \chi M_p g_0, \Rightarrow d_c = \sqrt{\frac{4 \chi M_p g_0}{\pi \sigma_{\text{br}}}} = 0.84 \text{ мм}$$

здесь мы учли, что площадь поперечного сечения троса $S_c = \pi d_c^2 / 4$. Тогда масса троса есть

$$m_c = \rho_{\text{st}} S_c \ell = 57 \text{ кг.}$$

е) Теперь легко вычислить максимально допустимую массу дрона

$$m_d = M_p - m_c = 93 \text{ кг.}$$

Ответ: а) $M_{\text{sh}} = M_{\text{max}} - M_g - M_p = 245 \text{ кг}$, $R = \sqrt{\frac{M_{\text{sh}}}{4\pi\sigma}} = 36 \text{ м}$; б) $h_b = 15.0 \text{ км}$; в) $m_{\text{He}} = \frac{4}{3} \pi R^3 \eta \rho_a \left(\frac{M_{\text{He}}}{M_a} \right) = 142 \text{ кг}$; г) $\ell = h_b - h_p = 13 \text{ км}$; д) $d_c = \sqrt{\frac{4 \chi M_p g_0}{\pi \sigma_{\text{br}}}} = 0.84 \text{ мм}$, $m_c = 57 \text{ кг}$; е) $m_d = M_p - m_c = 93 \text{ кг}$. ($\$_{\text{max}} = 12 \text{ баллов}$).

Задача № 15. «Область прямой видимости и объектив камеры StratoSail»

Условие. С использованием условия и результатов предыдущей задачи определите

- минимально и максимально возможную дальность прямой видимости с летательного аппарата (ЛА) StratoSail (радиус Марса $\mathfrak{R}_M = 3396 \text{ км}$);
- минимально и максимально возможную долю (в %) от площади поверхности Марса, которую составляет область прямой видимости с летательного аппарата StratoSail;
- максимальный угловой диаметр, под которым будет виден баллон с поверхности Марса; во сколько раз полученное значение отличается от углового диаметра Солнца при наблюдениях с поверхности планеты (при этом $[D_{\odot}^{(\oplus)}]'' = 32'$ – угловой диаметр Солнца для наблюдателя на Земле, $r_M = 1.52 \text{ а.е.}$ – гелиоцентрические расстояние Марса)?
- минимальный диаметр объектива зеркальной фотокамеры, необходимого для разрешения объектов поверхности планеты с поперечником $d_{\text{min}} = 3 \text{ см}$ и более;
- минимальное оптическое увеличение камеры, чтобы данные объекты можно было рассмотреть через окуляр камеры человеческим глазом? Разрешающую способность глаза принять равной $\beta_y'' = 100''$. (13 баллов).

Решение:

а) Рассмотрим физическую систему – Марс, представляемый шаром, и воздушный шар над его поверхностью (точка А). Для него "объектом на горизонте" будет точка В (см. рис. 10). В итоге имеем прямоугольный треугольник $\triangle ABC$, для которого по теореме Пифагора:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2, \Rightarrow (\mathfrak{R}_M + h)^2 = r^2 + \mathfrak{R}_M^2,$$

Преобразуем последнее выражение

$$\mathfrak{R}_M^2 + h^2 + 2\mathfrak{R}_M h = r^2 + \mathfrak{R}_M^2, \Rightarrow r = \sqrt{2\mathfrak{R}_M h + h^2}.$$

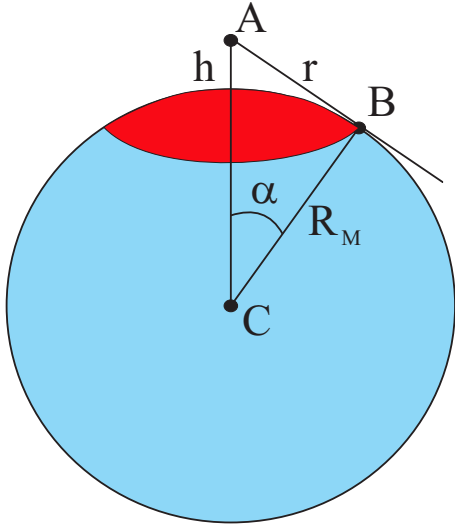
Дано:
 $d_{\text{min}} = 10 \text{ см}$,
 $\beta_y'' = 100''$,
 $\mathfrak{R}_M = 3396 \text{ км}$.

Найти:
 $r_{\text{min}}, r_{\text{max}} - ?$
 $\eta_{\text{min}}, \eta_{\text{max}} - ?$
 $D_{b \text{ max}}'', D_{\odot}'' / D_b'' - ?$
 $D_{\text{min}}^{(\text{Ob})}, \Gamma_{\text{min}} - ?$

Поскольку низшая точка летательного аппарата находится на высоте $h_p = 2$ км, а верхняя точка – на высоте $h_b = 15$ км, то минимальная и максимальная дальность прямой видимости определяются выражениями вида:

$$r_{\min} = \sqrt{2\mathfrak{R}_M h_p + h_p^2} = 116.6 \text{ км}, \quad r_{\max} = \sqrt{2\mathfrak{R}_M h_b + h_b^2} = 319.5 \text{ км}.$$

б) Часть поверхности Марса, доступная прямым наблюдениям с высоты h , есть шаровой сектор (выделен красным цветом на рис. 10). Его площадь можно вычислить по формуле (см., например, Справочник по высшей математике Выгодского):



$$S_{sec} = 2\pi\mathfrak{R}_M^2(1 - \cos \alpha). \quad (25)$$

где α – угол между направлениями на летательный аппарат и на объект на горизонте, если смотреть из центра Марса. Полная площадь поверхности планеты есть

$$S_{sphere} = 4\pi\mathfrak{R}_M^2. \quad (26)$$

Следовательно, доля η есть отношение площадей сектора и всей поверхности сферы:

$$\eta = \frac{S_{sec}}{S_{sphere}} \times 100\% = \frac{1}{2}(1 - \cos \alpha) \times 100\%. \quad (27)$$

Из рисунка видно, что

$$\cos \alpha = \frac{\mathfrak{R}_M}{\mathfrak{R}_M + h}, \quad \Rightarrow \quad \eta = \frac{1}{2} \left(\frac{h}{\mathfrak{R}_M + h} \right) \times 100\%.$$

Рис. 10: к определению дальности прямой видимости.

В результате минимальная и максимальная доли от площади поверхности всей планеты есть

$$\eta_{\min} = \frac{1}{2} \left(\frac{h_p}{\mathfrak{R}_M + h_p} \right) \times 100\% = 0.03\%, \quad \eta_{\max} = \frac{1}{2} \left(\frac{h_b}{\mathfrak{R}_M + h_b} \right) \times 100\% = 0.22\%. \quad (28)$$

в) Угловой диаметр баллона можно определить как

$$D_b'' = 2 \frac{R}{\Delta} 206265'',$$

здесь Δ – расстояние от баллона до точки на поверхности планеты, из которой ведется его наблюдение. Очевидно, что D_b'' будет максимальным, если Δ минимально, т.е. $\Delta = h_b$ (т.е. для воображаемого наблюдателя баллон должен находиться в зените). Тогда

$$D_{b \max}'' = 2 \frac{R}{h_b} 206265'' = 990'' = 16.5'$$

Угловой диаметр Солнца для наблюдателя на Марсе равен

$$D_{\odot}'' = [D_{\odot}^{(\oplus)}]'' \left(\frac{r_{\oplus}}{r_M} \right) = 32 \left(\frac{1}{1.52} \right) = 21',$$

здесь $r_{\oplus} = 1$ а.е. – гелиоцентрическое расстояние Земли. Тогда

$$D_{\odot}'' / D_{b \max}'' = 1.27.$$

г) Разрешающую способность зеркальной камеры можно оценить с использованием выражения для одноименного параметра рефлектора (зеркального телескопа):

$$\beta'' = \frac{120''}{D_{\text{Об}}[\text{мм}]}, \quad \Rightarrow \quad D_{\text{Об}} = \frac{120''}{\beta''}. \quad (29)$$

Чтобы разрешить в принципе объекты с $d = 10$ см с ЛА, необходимо, чтобы их угловой диаметр d'' был не меньше β'' , т.е.

$$d'' \geq \beta'',$$

в предельном случае имеем

$$D_{\text{Об}} = \frac{120''}{d''}.$$

В свою очередь

$$d'' = \frac{d}{\Delta} 206265'',$$

здесь Δ – расстояние от камеры до предмета. Чтобы диаметр объектива был минимальным, необходимо, чтобы d'' было максимальным, тогда $\Delta = h_b$, и

$$D_{\text{min}}^{(\text{Об})} = \frac{120''}{206265''} \frac{h_b}{d} \approx 39 \text{ мм}.$$

д) Оптическое увеличение камеры будет определяться отношением углового диаметра (d''_{cam}) образа предмета, даваемого камерой, к величине углового диаметра предмета, наблюдаемого невооруженным глазом:

$$\Gamma = \frac{d''_{\text{cam}}}{d''}.$$

Чтобы данные объекты можно было рассмотреть через окуляр камеры человеческим глазом, необходимо чтобы $d''_{\text{cam}} \geq \beta''_y$, в предельной ситуации имеем

$$\Gamma_{\text{min}} = \frac{\beta''_y}{d''} = \frac{\beta''_y}{206265''} \frac{h_p}{d} = 32.3^\times < 2D_{\text{Об}}[\text{мм}],$$

последнее условие, указывает на принципиальную возможность наблюдения объекта в данную камеру.

Ответ: а) $r_{\text{min}} = \sqrt{2\mathfrak{R}_M h_p + h_p^2} = 116.6$ км, $r_{\text{max}} = \sqrt{2\mathfrak{R}_M h_b + h_b^2} = 319.5$ км; б) $\eta_{\text{min}} = \frac{1}{2} \left(\frac{h_p}{\mathfrak{R}_M + h_p} \right) \times 100\% = 0.03\%$, $\eta_{\text{max}} = \frac{1}{2} \left(\frac{h_b}{\mathfrak{R}_M + h_b} \right) \times 100\% = 0.22\%$; в) $D''_{b \text{ max}} = 990'' = 16.5'$, $D''_{\odot} / D''_{b \text{ max}} = 1.27$; г) $D_{\text{min}}^{(\text{Об})} = \frac{120''}{206265''} \frac{h_b}{d} \approx 39$ мм; д) $\Gamma_{\text{min}} = \frac{\beta''_y}{d''} = \frac{\beta''_y}{206265''} \frac{h_p}{d} = 32.3^\times$. ($\mathfrak{S}_{\text{max}} = 13$ баллов).

Задача № 16. «Путешествие на капсуле HyperLoop сквозь центр Земли»

Условие. В 2012 году канадско-американский инженер-изобретатель Элон Маск (основатель компаний SpaceX, Tesla Motors и PayPal) анонсировал проект **Hyperloop** (Гиперпетля) – гипотетический вид высокоскоростного трубопроводного пассажирского транспорта. Представляет собой систему трубопроводов, в которых поддерживается низкое давление (около 1/1000 от атмосферного). По трубопроводам перемещаются капсулы компактных размеров, каждая из которых перевозит до 28 человек. Маск называет свой проект *пятым видом транспорта*. Развивая мысль автора, предположим, что человечеству удалось построить такой трубопровод сквозь центр Земли и запустить капсулу (без начальной скорости) с одной точки ее поверхности к диаметрально противоположной. Определите

- максимальную скорость, развиваемую капсулой в процессе движения; точку в теле Земли, в которой она достигается;
- максимальное ускорение, приобретаемое капсулой в процессе движения; точку в теле Земли, в которой оно достигается;
- минимальное время, затрачиваемое капсулой на преодоление диаметра Земли;
- во сколько раз отличается найденное время от величины минимального промежутка времени, отделяющего моменты прохождения над данными точками Земли, искусственного низкоорбитального спутника Земли (ИСЗ)?

д) Максимальное количество полных рейсов ("туда-обратно"), которые может сделать капсула за одни сутки.

В расчетах следует полагать, что Земля есть однородный шар; аэродинамическим сопротивлением, трением и суточным вращением Земли пренебречь. (13 баллов).

Решение:

Определим потенциальную энергию капсулы массы m в гравитационном поле планеты, находящаяся на расстоянии $r < \mathfrak{R}_\oplus$ ($\mathfrak{R}_\oplus = 6371$ км – средний радиус Земли). Как известно, потенциальная энергия капсулы на бесконечно большом расстоянии равна нулю, а у поверхности планеты:

$$U(\mathfrak{R}_\oplus) = -\frac{G m \mathfrak{M}_\oplus}{\mathfrak{R}_\oplus} = -m g_0 \mathfrak{R}_\oplus, \quad \text{где } g_0 = \left(\frac{G m \mathfrak{M}_\oplus}{\mathfrak{R}_\oplus^2} \right). \quad (30)$$

$\mathfrak{M}_\oplus, \mathfrak{R}_\oplus$ – масса и радиус Земли; $g_0 = 9.81$ м/с² – ускорение свободного падения у поверхности планеты.

Как будет показано в задаче № 17, сила притяжения, действующая на капсулу на расстоянии $r < \mathfrak{R}_\oplus$ от центра планеты, представляется в виде:

$$\vec{F}_{\text{at}} = -m g_0 \left(\frac{\vec{r}}{\mathfrak{R}_\oplus} \right). \quad (31)$$

здесь \vec{r} – геоцентрический радиус-вектор капсулы. Работа, совершаемая данной силой по перемещению капсулы с поверхности планеты до точки (с радиусом-вектором \vec{r}) положительна и равна

$$\Delta A = \vec{F}_{\text{at}} \Delta \vec{r} = \bar{F}_{\text{at}} \Delta r = \frac{m g_0}{\mathfrak{R}_\oplus} \left(\frac{r + \mathfrak{R}_\oplus}{2} \right) (\mathfrak{R}_\oplus - r) = \frac{1}{2} m g_0 \left(\mathfrak{R}_\oplus - \frac{r^2}{\mathfrak{R}_\oplus} \right).$$

С другой стороны данную работу можно представить в виде изменения потенциальной энергии, взятой со знаком «-»:

$$\Delta A = -(U(r) - U(\mathfrak{R}_\oplus)).$$

Приравнявая правые части двух последних уравнений в результате получаем формулу для искомой потенциальной энергии:

$$U(r) = -\frac{1}{2} m g_0 \left(3\mathfrak{R}_\oplus - \frac{r^2}{\mathfrak{R}_\oplus} \right). \quad (32)$$

Согласно условию задачи диссипативные силы отсутствуют, то выполняется закон сохранения энергии. Запишем его для капсулы в двух токах: на поверхности планеты и на расстоянии r от центра:

$$-m g_0 \mathfrak{R}_\oplus = m \frac{V^2}{2} - \frac{1}{2} m g_0 \left(3\mathfrak{R}_\oplus - \frac{r^2}{\mathfrak{R}_\oplus} \right), \quad \Rightarrow \quad V^2 = g_0 \left(\mathfrak{R}_\oplus - \frac{r^2}{\mathfrak{R}_\oplus} \right).$$

Очевидно, что скорость капсулы достигает максимального значения – первой космической скорости (V_I) при $r = 0$ (в центре Земли):

$$V_{\text{max}} = V_I = \sqrt{g_0 \mathfrak{R}_\oplus} = 7.91 \text{ км/с.}$$

б) Запишем второй закон Ньютона для капсулы в терминах модулей:

$$m a = m g_0 \left(\frac{r}{\mathfrak{R}_\oplus} \right), \quad \Rightarrow \quad a = g_0 \left(\frac{r}{\mathfrak{R}_\oplus} \right).$$

Очевидно, что максимальное ускорение капсула приобретает у поверхности Земли (при $r = \mathfrak{R}_\oplus$) и оно равно

$$a_{\text{max}} = g_0 = 9.81 \text{ м/с}^2.$$

в) Запишем второй закон Ньютона для капсулы в проекциях на направление геоцентрического радиуса-вектора капсулы:

$$m \ddot{r} = -m g_0 \left(\frac{r}{\mathfrak{R}_\oplus} \right), \quad \Rightarrow \quad \ddot{r} + \left(\frac{g_0}{\mathfrak{R}_\oplus} \right) r = 0.$$

Последнее уравнение является уравнением гармонических колебаний вида:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0,$$

где ω_0 – собственная частота колебаний. Из сопоставления двух последних уравнений приходим к уравнению вида:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g_0}{\mathfrak{R}_\oplus}}, \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{\mathfrak{R}_\oplus}{g_0}} = \frac{2\pi \mathfrak{R}_\oplus}{\sqrt{g_0 \mathfrak{R}_\oplus}} = 1.41 \text{ часа.}$$

Т.о. капсула в трубопроводе (шахте), если ее не останавливать, будет совершать гармонические колебания между двумя диаметрными точками поверхности Земли с периодом T , очевидно, равным периоду обращения низкоорбитального ИСЗ вокруг Земли со скоростью V_I .

Следовательно, минимальное время на преодоление диаметра Земли будет равно

$$t_{\min}^{(c)} = \frac{1}{2}T = 0.70 \text{ часа} \approx 42 \text{ мин.}$$

Т.о. всего лишь 42 минуты необходимо пассажирам такой капсулы, чтобы оказаться на другой стороне Земли.

г) Минимальный промежуток времени ($t_{\min}^{(s)}$), отделяющий моменты прохождения над данными точками Земли, низкоорбитального ИСЗ, очевидно, равен $t_{\min}^{(s)} = \frac{1}{2}T$, следовательно,

$$\frac{t_{\min}^{(s)}}{t_{\min}^{(c)}} = 1.$$

д) Максимальное количество полных рейсов ("туда-обратно") – N_{\max} , которые может сделать капсула за одни сутки есть

$$N_{\max} = \left[\frac{24 \text{ часа}}{T} \right] = 17.$$

Ответ: а) $V_{\max} = \sqrt{g_0 \mathfrak{R}_\oplus} = 7.91 \text{ км/с}$, достигается в центре Земли; б) $a_{\max} = g_0 = 9.81 \text{ м/с}^2$, достигается у поверхности Земли; в) $t_{\min}^{(c)} = \frac{1}{2}T = 0.70 \text{ часа} \approx 42 \text{ мин}$; г) $t_{\min}^{(s)}/t_{\min}^{(c)} = 1$; д) $N_{\max} = \left[\frac{24 \text{ часа}}{T} \right] = 17$. ($\$_{\max} = 13$ баллов).

Задача № 17. «Определение ускорения свободного падения для планеты-шара»

Условие. С использованием теоремы Гаусса определите а) напряженность поля тяготения (E) и б) ускорение свободного падения (g) для планеты, являющейся однородным шаром с массой \mathfrak{M} и радиусом \mathfrak{R} , как функцию расстояния (r) до ее центра и широты точки наблюдения φ (определяется аналогично географической). В расчетах следует учесть осевое вращение планеты с периодом T . Рассмотрите случай внешней и внутренней точки и представьте итоговые результаты в терминах величин, определенных у поверхности планеты на ее полюсах. Рассмотрите в качестве примера Землю ($g_0 = 9.83 \text{ м/с}^2$, $\mathfrak{R}_\oplus = 6371 \text{ км}$) и постройте график зависимости относительного изменения ускорения свободного падения, определяемого выражением

$$\varepsilon_g(\varphi) = \frac{|g(\mathfrak{R}_\oplus, \pi/2) - g(\mathfrak{R}_\oplus, \varphi)|}{g(\mathfrak{R}_\oplus, \pi/2)} \times 100\%, \quad (33)$$

по отношению к его значению на полюсах. Определите значение ($\varepsilon_g(0)$) относительного изменения ускорения при переходе от полюсов к экватору планеты. ($\$_{\max} = 14$ баллов).

Решение:

Для характеристики величины и направления силового поля тяготения неподвижного небесного тела (планеты) в конкретной точке пространства вводят векторную величину – **напряженность гравитационного поля** (\vec{E}), определяемую отношением силы, действующей со стороны данного гравитирующего тела на пробное тело, помещенное в данную точку пространства, к массе m пробного тела, т.е.

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{m}. \quad (34)$$

Для напряженности \vec{E} гравитационного поля справедлива теорема Гаусса², которая формулируется так: *поток вектора напряженности гравитационного поля через воображаемую замкнутую поверхность S равен полной массе \mathfrak{M}_S , находящейся внутри данной поверхности, домноженной на коэффициент $-4\pi G$, т.е.*

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = -4\pi G \mathfrak{M}_S. \quad (35)$$

В качестве замкнутой поверхности выберем воображаемую сферу радиуса r с центром, совпадающим с центром планеты. Вычислим поток напряженности через заданную поверхность. Для этого учтем, что планета является однородной, а ее форма – шар, обладающая сферической симметрией. На больших расстояниях от планеты, последняя видится материальной точкой, силовые линии которой, согласно (34) и закону всемирного тяготения направлены вдоль радиуса планеты. Причем такая картина должна быть на любых расстояниях от планеты, поскольку, очевидно, нет прочих причин, ответственных за отклонение их направлений от радиального. Следовательно, вектор \vec{E} поля тяготения планеты всегда направлен вдоль радиуса планеты, к ее центру (см. рис. 11.а). Определим скалярное произведение векторов под интегралом правой части (35).

$$\vec{E} d\vec{S} = (\vec{E} \vec{n}) dS = E dS \cos(180^\circ) = -E dS.$$

здесь \vec{n} – внешняя нормаль к элементарной площадке dS рассматриваемой сферы.

Заметим, что все точки воображаемой сферы равноправны, и потому, очевидно, напряженность поля тяготения планеты во всех ее точках будет одинаковой. В итоге интеграл в левой части (35) представляется в виде:

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = - \int_S E dS = -E \oint_S dS = -E S_{\text{sphere}}.$$

учитывая, что площадь поверхности сферы радиуса r есть

$$S_{\text{sphere}} = 4\pi r^2,$$

в итоге поток вектора \vec{E} представляется в виде:

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = -4\pi r^2 E. \quad (36)$$

Рассмотрим случай внутренней точки планеты. Определим напряженность на поверхности сферы радиуса r_1 (см. 11.а). Здесь поток вектора \vec{E} определяется выражением (36) при $r = r_1$. Масса планетного вещества, заключенного внутри данной сферы есть

$$\mathfrak{M}_S = \mathfrak{M} \frac{4\pi r_1^3/3}{4\pi \mathfrak{R}^3/3} = \mathfrak{M} \left(\frac{r_1}{\mathfrak{R}}\right)^3.$$

В результате напряженность гравитационного поля на расстоянии r_1 от центра планеты (внутри нее) определяется выражением вида:

$$E_1 = \frac{G \mathfrak{M}}{\mathfrak{R}^3} r_1 = \left(\frac{r_1}{\mathfrak{R}}\right) E_0, \quad \text{где } E_0 = \frac{G \mathfrak{M}}{\mathfrak{R}^2}.$$

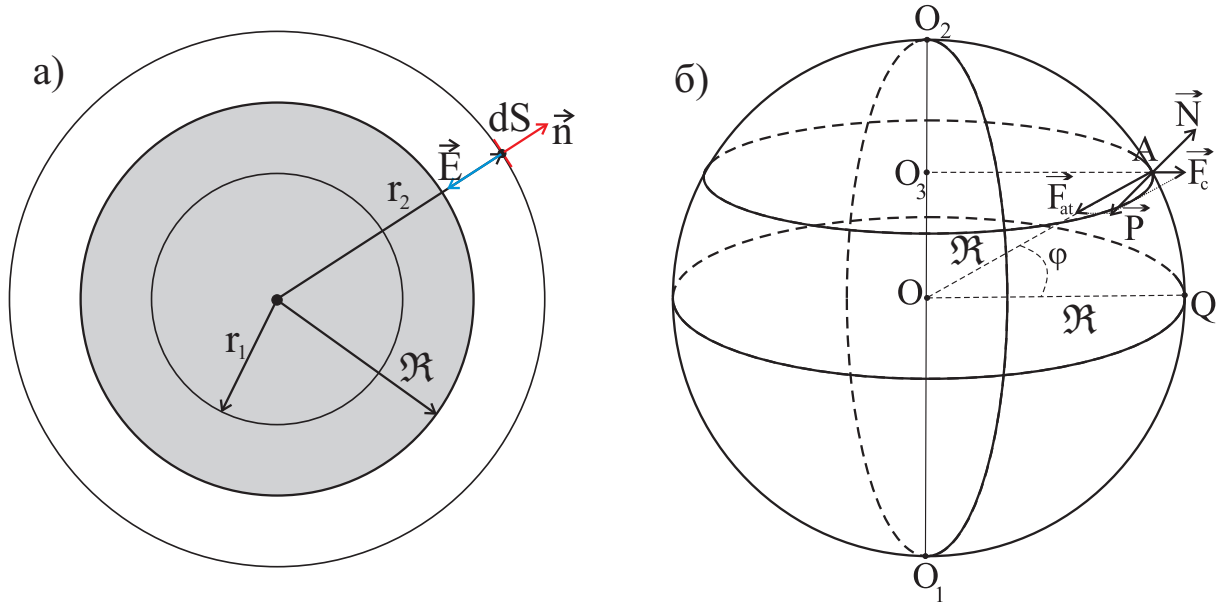


Рис. 11: к определению а) потока напряженности \vec{E} через замкнутую поверхность S , б) ускорения свободного падения в теле планеты.

здесь E_0 – напряженность гравитационного поля у поверхности планеты. Определим поле \vec{E} в случае внешней точки планеты, а именно на расстоянии r_2 от центра планеты (см. рис. 11.а). В данном случае масса $\mathfrak{M}_S = \mathfrak{M}$. Тогда

$$E_2 = \frac{G \mathfrak{M}}{r_2^2} = \left(\frac{\mathfrak{R}}{r_2}\right)^2 E_0.$$

В итоге напряженность поля тяготения планеты представляется в виде:

$$\vec{E} = -E(r)\frac{\vec{r}}{r}, \text{ где } E(r) = \begin{cases} \left(\frac{r}{\mathfrak{R}}\right) E_0, & \text{при } r \leq \mathfrak{R}, \\ \left(\frac{\mathfrak{R}}{r}\right)^2 E_0, & \text{при } r > \mathfrak{R} \end{cases}, \quad E_0 = \frac{G \mathfrak{M}}{\mathfrak{R}^2}. \quad (37)$$

Ускорение свободного падения (g) – ускорение, приобретаемое телом под действием силы тяжести, то есть геометрической суммы гравитационной силы притяжения планеты и сил инерции, обусловленных вращением планеты. В соответствии со вторым законом Ньютона, ускорение свободного падения равно силе тяжести, действующей на объект единичной массы.

Рассмотрим взаимодействие планеты с пробным телом (далее материальная точка А) массы m , находящимся на его поверхности на широте φ (см. рис. 11.б). В системе отсчета, жестко связанной с телом планеты, точка А неподвижна, а сама система является неинерциальной, поскольку участвует во вращательном движении вместе с планетой относительно далеких звезд. На материальную точку А на поверхности планеты действуют 3 силы (см. рис. 11.б):

- сила тяготения \vec{F}_{at} , направленная к центру планеты,
- центробежная сила \vec{F}_c , направленная от оси вращения планеты,
- сила реакции поверхности планеты \vec{N} .

Поскольку относительно тела планеты и, следовательно, выбранной системы отсчета материальная точка А покоится, то сумма всех выше указанных сил должна быть равна нулю (согласно второму закону Ньютона):

$$\vec{F}_{at} + \vec{F}_c + \vec{N} = 0, \Rightarrow \vec{N} = -(\vec{F}_{at} + \vec{F}_c). \quad (38)$$

²Отметим, что данная теорема является эффективным инструментом для расчета напряженности гравитационного поля \vec{E} физической системы, при условии, что последняя имеет зеркальную, цилиндрическую или сферическую симметрии в распределении массы вещества.

С другой стороны, согласно третьему закону Ньютона, для тела, покоящегося относительно горизонтальной поверхности имеет место:

$$\vec{P} + \vec{N} = 0, \quad (39)$$

где \vec{P} – вес тела. Последний, как известно, в состоянии относительного покоя материальной точки равен силе тяжести, действующей на точку А, т.е.

$$\vec{P} = \vec{F}_G = m \vec{g}. \quad (40)$$

Центробежную силу можно определить выражением вида:

$$\vec{F}_c = m \omega^2 \vec{r}', \quad (41)$$

где $\omega = \frac{2\pi}{T}$ – угловая скорость вращения планеты; $\vec{r}' = \overrightarrow{O_3A}$. Сила тяготения \vec{F}_{at} определяется выражением (34), причем $\vec{r} = \overrightarrow{OA}$. Из уравнений (38)–(40) следует уравнение вида:

$$m \vec{g} = \vec{F}_{at} + \vec{F}_c, \Rightarrow \vec{g} = \vec{E} + \omega^2 \vec{r}'. \quad (42)$$

при этом модуль ускорения свободного падения есть

$$g = \sqrt{\vec{g}^2} = \sqrt{\vec{E}^2 + (\omega^2 \vec{r}')^2 + 2\omega^2(\vec{E} \vec{r}')}, \quad (43)$$

Вспользуемся далее *широтой* φ – углом между плоскостью экватора и радиусом-вектором, проведенным из центра шара к данной точке (см. рис. 11.6). Тогда

$$r' = r \cdot \cos \varphi, \quad \vec{r} \cdot \vec{r}' = r \cdot r' \cdot \cos \varphi = r^2 \cdot \cos^2 \varphi.$$

Т.о. при $r \leq \mathfrak{R}$ ускорение свободного падения представляется в виде:

$$g(r, \varphi) = g_0 \left(\frac{r}{\mathfrak{R}} \right) \sqrt{1 + (\chi^2 - 2\chi) \cos^2 \varphi}, \quad \text{где} \quad (44)$$

$$g_0 = E_0 = \frac{G \mathfrak{M}}{\mathfrak{R}^2}, \quad \chi = \frac{4\pi^2 \mathfrak{R}}{E_0 T^2}. \quad (45)$$

Таким образом, ускорение свободного падения в общем случае зависит от расстояния до центра планеты и от широты местонахождения материальной точки А. Рассмотрим ряд частных случаев:

- ускорение свободного падения у поверхности планеты ($r = \mathfrak{R}$):

$$g(\varphi) = g_0 \sqrt{1 + (\chi^2 - 2\chi) \cos^2 \varphi}. \quad (46)$$

- Безразмерный параметр χ определяется отношением величин сил \vec{F}_c (определенной на экваторе) и \vec{F}_{at} . Параметр χ для любой классической планеты Солнечной системы есть величина, удовлетворяющая условию $\chi \ll 1$, следовательно, $\chi^2 \ll \chi$. Тогда для ускорения свободного падения справедливо следующее приближенное выражение

$$g(\varphi) \approx g_0 \sqrt{1 - 2\chi \cos^2 \varphi}. \quad (47)$$

Учитывая также тот факт, что $\cos^2 \varphi \leq 1$ и приближение вида $(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x$, при $|x| \ll 1$, последний результат можно редуцировать к виду:

$$g(\varphi) \approx g_0(1 - \chi \cos^2 \varphi). \quad (48)$$

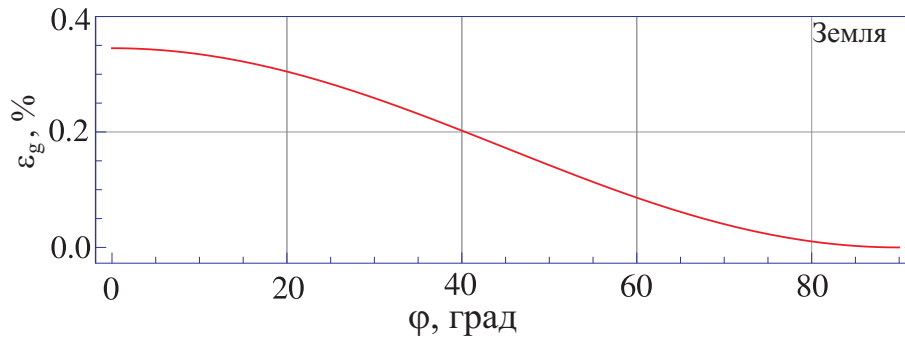


Рис. 12: зависимость относительного изменения ускорения свободного падения от широты местности (на поверхности Земли).

Вне тела планеты ($r > \mathfrak{R}$) силы ее реакции, принуждающие к вращению, отсутствуют, следовательно, центробежная сила отсутствует, тогда $g(r) = E(r)$. В итоге ускорение свободного падения есть

$$\vec{g} = \vec{E} + \omega^2 \vec{r}^j, \quad g(r, \varphi) = \left\{ \begin{array}{l} g_0 \left(\frac{r}{\mathfrak{R}} \right) \sqrt{1 + (\chi^2 - 2\chi) \cos^2 \varphi}, \quad \text{при } r \leq \mathfrak{R}, \\ g_0 \left(\frac{\mathfrak{R}}{r} \right)^2, \quad \text{при } r > \mathfrak{R} \end{array} \right\}, \quad (49)$$

$$\text{где } g_0 = E_0 = \frac{G\mathfrak{M}}{\mathfrak{R}^2} = 9.83 \text{ м/с}^2, \quad \chi = \frac{4\pi^2\mathfrak{R}}{E_0 T^2} = 3.45 \cdot 10^{-3}. \quad (50)$$

Рассмотрим случай Земли и определим $\varepsilon_g(\varphi)$ на ее поверхности в зависимости от широты φ :

$$\varepsilon_g(\varphi) = \left(\frac{g_0 - g(\varphi)}{g_0} \right) \cdot 100\% = \left(1 - \sqrt{1 + (\chi^2 - 2\chi) \cos^2 \varphi} \right) \cdot 100\%. \quad (51)$$

Искомая кривая представлена на рис. 12.

В частности, при переходе с полюсов на экватор имеем:

$$\varepsilon_g(0) = (1 - \sqrt{1 + (\chi^2 - 2\chi)}) \cdot 100\% = \chi \cdot 100\% = 0.345\%. \quad (52)$$

Ответ: представлен выражениями (37), (49), (50), (52) и рис. 12. ($\$_{\max} = 14$ баллов).

Задача № 18. «Закон планетных расстояний Шмидта»

Условие. В 1946 году академик О.Ю. Шмидт с использованием общих принципов небесной механики предложил новую форму закона планетных расстояний (гелиоцентрических расстояний планет), наиболее общий вид которого можно представить так:

$$\sqrt{r_n} = a + bn, \quad (53)$$

здесь a, b – константы, подлежащие определению, n – порядковый номер планеты. Данный набор параметров определялся Шмидтом отдельно для планет земной группы и группы планет-гигантов + Плутон. С использованием метода наименьших квадратов, данных для планетных расстояний, представленных в таблице 3 определите параметры закона (53) для а) планет земной группы, б) планет-гигантов, в) ледяных планет-карликов. Представьте на графиках полученные линейные зависимости и точки, соответствующие планетам. Вычислите абсолютные и относительные ошибки определения гелиоцентрических расстояний планет с помощью законов Шмидта. Попытайтесь дать прогноз относительно вакантных орбит планет-карликов. (15 баллов).

Планеты земн. группы		Планеты-гиганты		Планеты-карлики	
Название	r_P , а.е.	Название	r_P , а.е.	Название	r_P , а.е.
Меркурий	0.387	Юпитер	5.204	Плутон	39.264
Венера	0.723	Сатурн	9.582	Хаумеа	43.218
Земля	1.000	Уран	19.189	Макемаке	45.715
Марс	1.520	Нептун	30.071	Эрида	67.958

Таблица 3: планеты Солнечной системы трех основных групп и соответствующие гелиоцентрические расстояния до планет.

Решение:

Прежде всего определим порядковый номер планеты (в порядке их удаленности от Солнца) в каждой планетной группе и вычислим величину $\sqrt{r_n}$:

Планеты земн. группы			Планеты-гиганты			Планеты-карлики		
n	Название	$\sqrt{r_n}$, а.е. ^{1/2}	n	Название	$\sqrt{r_n}$, а.е. ^{1/2}	n	Название	$\sqrt{r_n}$, а.е. ^{1/2}
1	Меркурий	0.622	1	Юпитер	2.281	1	Плутон	6.283
2	Венера	0.850	2	Сатурн	3.095	2	Хаумеа	6.574
3	Земля	1.000	3	Уран	4.381	3	Макемаке	6.761
4	Марс	1.234	4	Нептун	5.484	4	Эрида	8.249

Таблица 4: планеты Солнечной системы трех основных групп, их порядковые номера в группе и величины $\sqrt{r_n}$.

Представим полученные результаты в виде графиков (см. рис. 13.а-в). Из графиков видно, что в случае планет земной группы и планет-гигантов все точки, соответствующие данным планетам лежат почти на одной прямой. В случае планет-карликов, точки, соответствующие Плутону, Хаумеи, Макемаке лежат фактически на одной прямой, вот точка, соответствующая Эриде лежит существенно выше указанной прямой. Данному факту можно дать два альтернативных объяснения:

1. Эрида может входить в другую, неизвестную группу планет (подобную другим группам) и потому не обязана лежать на одной прямой с остальными планетами-карликами.

2. Если Эрида все-таки принадлежит данной группе (что подразумевается в условии задачи), то ее порядковый номер n_E должен быть существенно больше "4". Последний также подлежит определению. А орбиты с порядковыми номерами 4, 5, 6, ..., $n_E - 1$ должны быть вакантными.

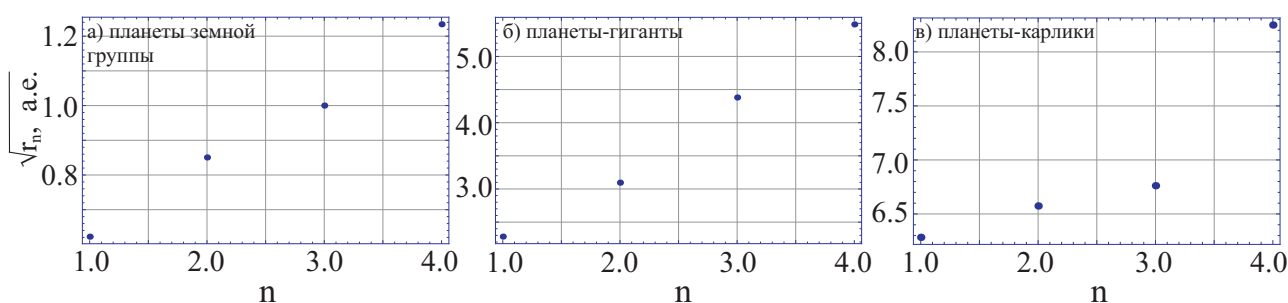


Рис. 13: Графики зависимости величины $\sqrt{r_n}$ от порядкового номера планеты для а) планет земной группы, б) планет-гигантов, в) планет-карликов.

Суть метода наименьших квадратов (МНК) заключается в нахождении коэффициентов a, b линейной зависимости (53), при которых функция двух переменных a и b

$$F(a, b) = \sum_{n=1}^N (\sqrt{r_n} - (a + bn))^2$$

принимает минимальное значение (здесь N – максимальное значение номера планеты в группе). То есть, при данных a и b сумма квадратов отклонений исходных данных от найденной прямой будет наименьшей.

Решение данной задачи сводится к решению задачи на экстремум для функции двух переменных. Для этого вычисляем частные производные от функции $F(a, b)$ по $\sqrt{r_n}$ и n и приравняем их к нулю:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial F(a, b)}{\partial a} = 0, \\ \frac{\partial F(a, b)}{\partial b} = 0, \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -2 \sum_{n=1}^N (\sqrt{r_n} - (a + bn)) = 0, \\ -2 \sum_{n=1}^N n(\sqrt{r_n} - (a + bn)) = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} aN + b \sum_{n=1}^N n = \sum_{n=1}^N \sqrt{r_n}, \\ a \sum_{n=1}^N n + b \sum_{n=1}^N n^2 = \sum_{n=1}^N n \sqrt{r_n}, \end{array} \right\}$$

Решаем полученную систему линейных уравнений любым методом (например методом подстановки или методом Крамера), получаем формулы для нахождения коэффициентов a, b по МНК.

$$\left\{ \begin{array}{l} b = \frac{N \sum_{n=1}^N n \sqrt{r_n} - \sum_{n=1}^N n \sum_{n=1}^N \sqrt{r_n}}{N \sum_{n=1}^N n^2 - \left(\sum_{n=1}^N n \right)^2}, \\ a = \frac{1}{N} \left(\sum_{n=1}^N \sqrt{r_n} - b \sum_{n=1}^N n \right), \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} b = \frac{N \sum_{n=1}^N n \sqrt{r_n} - \frac{1}{2} N(N+1) \sum_{n=1}^N \sqrt{r_n}}{\frac{1}{6} N^2(N+1)(2N+1) - \frac{1}{4} N^2(N+1)^2}, \\ a = \frac{1}{N} \left(\sum_{n=1}^N \sqrt{r_n} - \frac{b}{2} N(N+1) \right), \end{array} \right\} \quad (54)$$

Можно строго доказать, что при данных a и b функция $F(a, b)$ принимает минимальное значение (см. например, Справочник по высшей математике Выгодского).

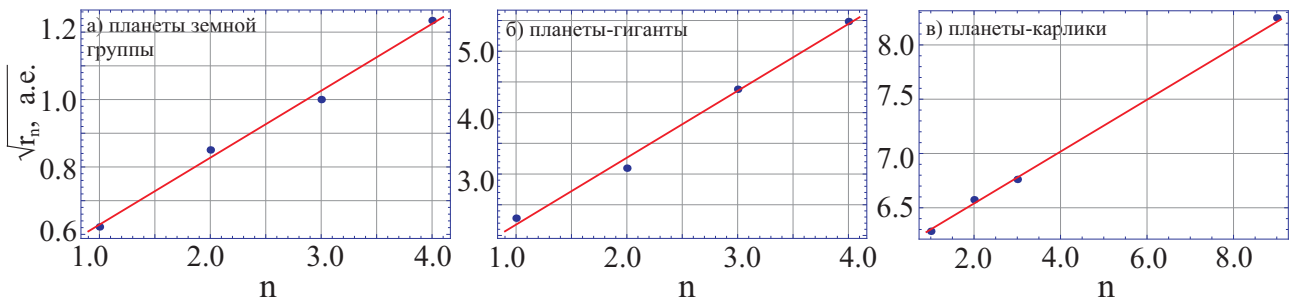


Рис. 14: графики зависимости величины $\sqrt{r_n}$ от порядкового номера планеты (законы Шмидта) для а) планет земной группы, б) планет-гигантов, в) планет-карликов (скорректированная версия).

Выполняя вычисления коэффициентов по полученным формулам, в результате получаем следующие законы планетных расстояний Шмидта для

$$\left. \begin{array}{l} \text{а) планет земной группы} \quad \sqrt{r_n} = 0.4302 + 0.1986 n, \\ \text{а) планет-гигантов} \quad \sqrt{r_n} = 1.0872 + 1.0892 n, \\ \text{а) планет-карликов} \quad \sqrt{r_n} = 6.0618 + 0.2389 n, \end{array} \right\} \quad (55)$$

Результат для планет карликов, получен по данным трех планет: Плутона, Хаумеи, Макемаке.

Для определения порядкового номера Эриды, соответствующего данному закону, необходимо определить решить следующее линейное уравнение относительно n :

$$\sqrt{r_E} = 6.0618 + 0.2389 n_E, \Rightarrow n_E = [9.156] = 9.$$

Проведем графическое сравнение законов Шмидта и точек, соответствующих планетам (см. рис. 14).

Далее вычислим абсолютные и относительные ошибки определения гелиоцентрических расстояний планет с помощью законов Шмидта согласно следующим формулам:

$$\Delta r_n = |r_n^{(T)} - r_n^{(Sh)}|, \quad \varepsilon_{r_n} = \frac{\Delta r_n}{r_n^{(T)}} \times 100\%,$$

здесь $r_n^{(T)}$ – истинные гелиоцентрические расстояния до планет, $r_n^{(Sh)}$ – те же величины, вычисленные согласно закону Шмидта. Результаты расчетов представлены в таблицах 5, 6.

Из таблиц видно, что в большинстве случаев ошибка определения расстояния с помощью законов (55) в среднем составляет $1 \div 5\%$. На фоне остальных сильно выделяется Сатурн, у которого ошибка определения составляет 11.3% .

n	Название	r_n^T , а.е.	r_n^{Sh} , а.е.	Δr_n , а.е.	ε_{r_n} , %
Планеты земной группы					
1	Меркурий	0.387	0.395	0.008	2.16
2	Венера	0.723	0.685	0.039	5.34
3	Земля	1.000	1.053	0.053	5.28
4	Марс	1.520	1.500	0.024	1.56
Планеты-гиганты					
1	Юпитер	5.204	4.737	0.468	8.98
2	Сатурн	9.582	10.664	1.082	11.30
3	Уран	19.189	18.965	0.224	1.17
4	Нептун	30.071	29.638	0.433	1.44

Таблица 5: значения гелиоцентрических расстояний, полученные из наблюдений $r_n^{(T)}$, предсказываемые законом Шмидта $r_n^{(Sh)}$, абсолютные и относительные ошибки их определения с использованием данного закона для планет земной группы и планет-гигантов.

n	Название	r_n^T , а.е.	r_n^{Sh} , а.е.	Δr_n , а.е.	ε_{r_n} , %
Планеты-карлики					
1	Плутон	39.482	39.698	0.216	0.55
2	Хаумеа	43.218	42.766	0.452	1.04
3	Макемаке	45.715	45.948	0.233	0.51
4	?	?	49.245	–	–
5	?	?	52.654	–	–
6	?	?	56.178	–	–
7	?	?	59.816	–	–
8	?	?	63.569	–	–
9	Эрида	68.0474	67.436	1.038	1.53

Таблица 6: значения гелиоцентрических расстояний, полученные из наблюдений $r_n^{(T)}$, предсказываемые законом Шмидта $r_n^{(Sh)}$, абсолютные и относительные ошибки их определения с использованием данного закона для планет-карликов.

В случае планет-карликов пять орбит с порядковыми номерами $n = 4, 5, 6, 7, 8$ являются вакантными. Ученым сегодня не известны карликовые планеты с указанными средними гелиоцентрическими расстояниями (однако, их могут занимать транснептуновые объекты, определение которых мы оставляем читателю).

Ответ: представлен системой (55), в таблицах 5-6 и на рис. 14. ($\$_{\max} = 15$ баллов).